

1, 2, 3. Формулировка задачи оптимизации поиска равновесных объемов и цен в сетевом аукционе поставщиков и потребителей одного товара с ограничениями на передачу. Определение равновесных цен в сетевом аукционе. Финансовый баланс в сетевом аукционе с ограничениями на передачу.

Постановка задачи:

c_{Π} — ценовая заявка потребителей $\Pi \in \Pi$ (готовность купить 1 единицу товара по цене не выше c_{Π})

$c_{\Gamma}, \Gamma \in \Gamma$ — ценовые заявки генераторов (готовы продать 1 единицу товара по цене не ниже c_{Γ})

Найти равновесные цены и объемы x_{Π} и x_{Γ} , которые являются **индивидуально рациональными** стратегиями участников.

Математическая модель

Функция благосостояния рынка:

$$\sum_{\Pi \in \Pi} c_{\Pi} x_{\Pi} - \sum_{\Gamma \in \Gamma} c_{\Gamma} x_{\Gamma} \rightarrow \max_{x_{\Gamma}, x_{\Pi}} \\ \sum x_{\Pi} - \sum x_{\Gamma} = 0, x_{\Pi} \in [0, \bar{x}_{\Pi}], x_{\Gamma} \in [0, \bar{x}_{\Gamma}]$$

Равновесие:

$$L(x, \lambda) = \sum_{\Pi} (c_{\Pi} - \lambda) x_{\Pi} + \sum_{\Gamma} (\lambda - c_{\Gamma}) x_{\Gamma} \rightarrow \max \sim \sum_{\Pi} \max_{x_{\Pi}} (c_{\Pi} - \lambda) x_{\Pi} + \sum_{\Gamma} \max_{x_{\Gamma}} (\lambda - c_{\Gamma}) x_{\Gamma}$$

$$c_{\Pi} - \lambda - \pi_{\Pi}^+ + \pi_{\Pi}^- = 0, \Pi \in \Pi \\ \lambda - c_{\Gamma} - \pi_{\Gamma}^+ + \pi_{\Gamma}^- = 0, \Gamma \in \Gamma$$

Финансовый баланс:

$$\lambda \left(\sum_{\Pi} x_{\Pi} \right) - \lambda \left(\sum_{\Gamma} x_{\Gamma} \right) = 0, \text{ экономический смысл множителя лагранжа } \lambda \text{ равновесная цена на рынке}$$

Территориально распределенный аукцион:

В задаче фигурируют генераторы (поставщики) в узле s : $\Gamma \in s : \Gamma_s$ и потребители в узле s : $\Pi \in s : \Pi_s$.

Задача: найти равновесие с учетом перетоктов товара между узлами и ограничений на пропускную способность сети.

Формулировка задачи:

$$(1) g(x_{\Pi}, x_{\Gamma}) = \sum_{\Pi \in \Pi} c_{\Pi} x_{\Pi} - \sum_{\Gamma \in \Gamma} c_{\Gamma} x_{\Gamma} \rightarrow \max \\ (2) \sum_{r \in B(s)} f_{rs} - \sum_{k \in A(s)} f_{sk} = \sum_{\Pi \in \Pi_s} x_{\Pi} - \sum_{\Gamma \in \Gamma_s} x_{\Gamma} \quad \forall s = \overline{1, N} \Rightarrow h(x_{\Pi}, x_{\Gamma}, f) \\ (3) -\underline{f}_{rs} \leq f_{rs} \leq \overline{f}_{rs} \quad (r, s) \Rightarrow k(f) \\ (4) 0 \leq x_{\Gamma} \leq V_i, \Gamma \in \Gamma \Rightarrow \underline{u}(x_{\Gamma}), \overline{u}(x_{\Gamma}) \\ (5) 0 \leq x_{\Pi} \leq V_{\Pi}, \Pi \in \Pi \Rightarrow \underline{v}(x_{\Pi}), \overline{v}(x_{\Pi})$$

x_{Γ} — объем поставщика (генератора) $\Gamma \in \Gamma$, V_{Γ} — максимальный объем;

x_{Π} — объем потребления $\Pi \in \Pi$, V_{Π} — максимальный объем.

c_{Γ} — целевая заявка поставщика (генератора) $\Gamma \in \Gamma$

c_{Π} — целевая заявка потребителя $\Pi \in \Pi$

$s = \overline{1, N}$ — индекс узла.

$A(s)$ — множество ветвей выходящих из узла s $\{r | \exists (s, r)\}$

$B(s)$ — множество ветвей входящих в узел s $\{r | \exists (r, s)\}$

f_{rs} — переменная потока по ветви (r, s) . Если $f_{rs} > 0$, то поток из r в s , если $f_{rs} < 0$, то поток из s в r .

(1) — целевой функцией является функция благосостояния рынка

(2) — материальный баланс (финансовый баланс) в узле s (ограничения баланса спроса и предложения в узле s сети)

(3) — Ограничения на пропускную способность сети

(4) и (5) — ограничения поставки и потребления.

Решая задачу оптимизации с помощью функции Лагранжа вводим следующий множители Лагранжа (неотрицательные):

(2) λ_s

(3) $\sigma_{rs}^+, \sigma_{rs}^-$ (цена пропускной способности ветви (r, s))

(4) π_r^-, π_r^+

(5) π_Π^-, π_Π^+

После решения задачи оптимизации (поиск равновесных объемов и цен) получим:

λ_s^* — равновесная цена в узле s .

x_Π^*, x_r^* — объемы участников аукциона.

Для билета 2.

Выпишем функцию Лагранжа:

$$L = g(x_\Pi, x_r) - \sum_s \lambda_s h(x_\Pi, x_r, f) - \sum \sigma_{rs}^+ \bar{k}_{rs} + \sum \sigma_{rs}^- \underline{k}_{rs} - \sum \pi_r^+ \bar{u}_r + \sum \pi_r^- \underline{u}_r - \sum \pi_\Pi^+ \bar{v}_\Pi + \sum \pi_\Pi^- \underline{v}_\Pi$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_r} = -c_r + \lambda_s - \pi_r^+ + \pi_r^- = 0, r \in \Gamma_s$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_\Pi} = c_\Pi - \lambda_s - \pi_\Pi^+ + \pi_\Pi^- = 0, \Pi \in \Pi_s$$

$$\lambda_s = c_r + \pi_r^+ - \pi_r^-, r \in \Gamma_s \quad c_\Pi = \lambda_s + \pi_\Pi^+ - \pi_\Pi^-, \Pi \in \Pi_s$$

Если максимальный объем $\Rightarrow \pi_r^- = 0 \Rightarrow \lambda_s$ — цена и поставщик имеет дополнительную прибыль.

Если заявка потребителя удовлетворена полностью $\Rightarrow \pi_\Pi^- = 0 \Rightarrow$ потребитель платит меньше, чем $\bar{c}_\Pi$.

$$\frac{\partial L}{\partial f_{rs}} = -\lambda_s + \lambda_r + \sigma_{rs}^+ - \sigma_{rs}^-$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_{rs}} = 0 = \begin{cases} \lambda_s = \lambda_r, & -\underline{f}_{rs} < f_{rs} < \bar{f}_{rs} \\ \lambda_s = \lambda_r + \sigma_{rs}^+ > \lambda_r, & f_{rs} = \bar{f}_{rs}, \sigma_{rs}^+ > 0 \\ \lambda_s = \lambda_r - \sigma_{rs}^- < \lambda_r, & f_{rs} = -\underline{f}_{rs}, \sigma_{rs}^- > 0 \end{cases}$$

Таким образом узловая цена не убывает в направлении потока и строго возрастает, если ограничение насыщено (то есть достигает предельных ограничений на поток из узла s в узел r).

Для билета 3.

Финансовый баланс в узле s (материальный баланс).

$$\sum_{\Pi \in \Pi_s} x_\Pi - \sum_{r \in \Gamma_s} x_r = \sum_{r \in B(s)} f_{rs} - \sum_{k \in A(s)} f_{sk}$$

Домножаем уравнение баланса в узле s на λ_s

$$\lambda_s \left(\sum_{\Pi \in \Pi_s} x_\Pi - \sum_{r \in \Gamma_s} x_r \right) = \left(\sum_{r \in B(s)} f_{rs} - \sum_{k \in A(s)} f_{sk} \right)$$

Просуммируем правую и левую части по s :

$$\sum_s \lambda_s \left(\sum_{\Pi \in \Pi_s} x_\Pi \right) - \sum_s \left(\sum_{r \in \Gamma_s} x_r \right) = \text{сумма денег, заплаченных потребителями} - \text{сумма денег, полученных генераторами}$$

$$\sum_s \lambda_s \left(\sum_{r \in B(s)} f_{rs} - \sum_{k \in A(s)} f_{sk} \right) = \sum_{(i,j) \in E} f_{ij} (\lambda_j - \lambda_i) = \sum_{(i,j) \in E} (\sigma_{ij}^+ \bar{f}_{ij} + \sigma_{ij}^- \underline{f}_{ij}) \geq 0,$$

так как

$$f_{ij} (\lambda_j - \lambda_i) = \begin{cases} 0, & \lambda_i = \lambda_j \\ \sigma_{ij}^+ \bar{f}_{ij}, & f_{ij} = \bar{f}_{ij} \\ \sigma_{ij}^- \underline{f}_{ij}, & f_{ij} = -\underline{f}_{ij} \end{cases}$$

10. Модель парной линейной регрессии. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова.

Модель парной регрессии

Рассмотрим модели регрессии. В них присутствует объясняемая (зависимая) переменная y и набор объясняющих (независимых) переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Связь между ними выражается следующим образом: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, где f — некоторая функция, а $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ — набор параметров. В зависимости от вида функции $f(x, \beta)$ модели делятся на линейные и нелинейные.

Рассмотрим набор двух переменных $X_t, Y_t, t = \overline{1, n}$. Можно отображать (X_t, Y_t) точками на плоскости.

Задача: подобрать $Y = f(X)$ из параметрического семейства $f(X, \beta)$ наилучшим образом описывающую зависимость Y от X .

Подобрать функцию означает выбрать β . Примером параметрического семейства является модель парной линейной регрессии: $f(X, \beta) = a + bX$.

Определим следующие меры отклонения полученных значений от реальных значений:

1. $F = \sum_{t=1}^n (Y_t - f(X_t, \beta))^2$ — сумма квадратов отклонений.
2. $F = \sum_{t=1}^n |Y_t - f(X_t, \beta)|$ — сумма модулей отклонений.
3. $F = \sum_{t=1}^n g(Y_t - f(X_t, \beta))$, где g — мера с которой отклонение входит в F .

Метод наименьших квадратов (МНК).

Пусть $f(x, \beta)$ — линейная функция с параметрами α и β : $Y = f(X, a, b) = a + bX$. Метод наименьших квадратов позволяет подобрать наилучшие параметры путем решения задачи оптимизации:

$$F = \sum_{t=1}^n (Y_t - f(X_t, \beta))^2 \rightarrow \min$$

Записав необходимые условия экстремума (производная равна 0), и решив систему уравнений, получаем оптимальные параметры:

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t, \quad \hat{b} = \frac{n \sum X_t Y_t - \sum X_t \sum Y_t}{n \sum X_t^2 - (\sum X_t)^2} = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)}$$

Линейная регрессионная модель с двумя переменными.

Добавим к постановке задачи статистические свойства данных. Запишем уравнение зависимости Y_t от X_t , добавив в него случайную величину ε_t . Получим регрессионное уравнение:

$$Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t, t = \overline{1, n}.$$

В этом уравнении X_t — неслучайная детерминированная величина, называется регрессор. Y_t, ε_t — случайные величины.

Случайная ошибка может возникать:

- Если модель является упрощением действительности, и в ней опускаются некоторые параметры.
- Если возможны неточности в измерении данных, используемых в модели.

Можно перечислить основные гипотезы линейной регрессионной модели с двумя переменными:

Основные гипотезы:

1. $Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t, t = 1, \dots, n$, - спецификация модели.
2. X_t - детерминированная величина; вектор $(X_1, \dots, X_n)'$ не коллинеарен вектору $i = (1, \dots, 1)'$.
3. (a) $E\varepsilon_t = 0, E(\varepsilon_t)^2 = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ - не зависит от t ($E\varepsilon = 0, V(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$)
(b) $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$, некоррелированность ошибок для разных наблюдений.
Часто добавляется условие:
(c) Ошибка $\varepsilon_t, t = 1, \dots, n$, имеют совместное нормальное распределение:
 $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Условие **3(a)** – независимость дисперсии ошибок от номера наблюдения называется **гомоскедастичностью**, случай когда это условие не выполняется называют **гетероскедастичностью**.

Условие **3(b)** указывает на некоррелированность ошибок для разных наблюдений. Оно часто нарушается, когда имеем дело с временными рядами. В случае, когда это условие не выполняется, говорят об **автокорреляции ошибок**.

Теорема Гаусса-Маркова

В модели линейной регрессии с двумя параметрами оценки параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$, полученные методом наименьших квадратов, имеют наименьшую дисперсию в классе всех линейных несмещенных оценок.

Исходя из теоремы, полученные МНК оценки параметров наилучшие для модели (в смысле наименьшей дисперсии). Остается оценить оставшийся параметр σ^2 .

Оценка дисперсии ошибок.

Найдем значение регрессионной функции с посчитанными коэффициентами: $\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$. Тогда, остатком регрессии будет называться следующая случайная величина: $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$.

Между оценкой σ^2 и суммой квадратов ошибки регрессии e_t существует связь, называемая несмещённый оценкой дисперсии ошибок:

$$s^2 = \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^n e_t^2$$

Если дисперсия ошибок σ^2 известна, то значения коэффициентов $\hat{a}$ и $\hat{b}$ можно найти по формулам из теоремы Гаусса-Маркова.

На практике, как правило, σ^2 неизвестна, и, заменив σ^2 на s^2 , можем получить оценки дисперсий коэффициентов $\hat{a}$ и $\hat{b}$:

$$\widehat{Var}(\hat{b}) = s^2 \frac{1}{\sum (X_t - \bar{X})^2} \quad \widehat{Var}(\hat{a}) = s^2 \frac{\sum X_t^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$$

Эти формулы используются для нахождения стандартных отклонений оценок коэффициентов регрессии:

$$s_{\hat{b}} = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{b})}, s_{\hat{a}} = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{a})}$$

11. Модель множественной регрессии. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова.

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

где x_{tp} — значения регрессора x_p в наблюдении t , а $x_{t1} = 1, t = 1, \dots, n$.

1. $y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$ — спецификация модели.
2. $x_{t1}, \dots, x_{tk}$ — детерминированные величины. Векторы $x_s = (x_{1s}, \dots, x_{ns})', s = 1, \dots, k$ линейно независимы в R^n .
3. а. $E\varepsilon_t = 0, E(\varepsilon_t^2) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ — не зависит от t .
б. $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$ — статистическая независимость (некоррелированность) ошибок для разных наблюдений. Часто добавляется следующее условие.
с. Ошибки $\varepsilon_t, t = 1, \dots, n$ имеют совместное нормальное распределение: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

В этом случае модель называется *нормальной линейной регрессионной*.

Метод наименьших квадратов

Целью метода является выбор вектора оценок $\hat{\beta}$, минимизирующего сумму квадратов остатков e_t (необъясненную часть дисперсии).

$$e = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta},$$
$$ESS = \sum e_t^2 = e'e \rightarrow \min_{\hat{\beta}}$$

Выразим $e'e$ через X и β :

$$e'e = y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}.$$

Необходимые условия минимума ESS получаются дифференцированием по вектору $\hat{\beta}$

$$\frac{\partial ESS}{\partial \hat{\beta}} = -2X'y + 2X'X\hat{\beta} = 0,$$

откуда, учитывая обратимость матрицы $X'X$ находим оценку метода наименьших квадратов:

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y.$$

Теорема Гаусса-Маркова

Для модели 1-Заб оценка $\hat{\beta}$, полученная с помощью метода наименьших квадратов, является лучшей линейной несмещенной оценкой.

Доказательство:

1) $\hat{\beta}'$ — несмещенная оценка β
 $E\hat{\beta} = E[(X'X)^{-1}X'y] = (X'X)^{-1}X'Ey = (X'X)^{-1}X'E(X\beta + \varepsilon) = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'E\varepsilon = \beta.$

Пусть $A = (X'X)^{-1}X'$

Тогда $\widehat{\beta} = Ay$

Пусть b — любая другая несмещенная оценка β . Тогда можно представить b в виде

$$b = (A + C)y, C \text{ } k \times n$$

Так как b — несмещенная оценка β , то $\beta = Eb = (A + C)Ey = (A + C)E(X\beta + \varepsilon) = (A + C)X\beta + (A + C)E\varepsilon = (A + C)X\beta = (AX + CX)\beta = (I + CX)\beta \Rightarrow CX = 0$.

2) Вычислим матрицу ковариаций $\widehat{\beta}$:

$$V(\widehat{\beta}) = V(Ay) = AV(y)A' = A\sigma^2 I A' = \sigma^2 (X'X)^{-1} X'X (X'X)^{-1} = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

$$3) V(b) = V(\widehat{\beta}) + \sigma^2 CC', CC' \geq 0.$$

$$\Rightarrow V(b) \geq V(\widehat{\beta}).$$

12. Понятие временного ряда. Понятие строго стационарного временного ряда. Условия стационарности временного ряда в широком смысле.

Под временным рядом понимается последовательность наблюдений значений некоторой переменной, произведенных через равные промежутки времени. Если принять длину такого промежутка за единицу времени (год, квартал, день и т.п), то можно считать, что последовательные наблюдения $x_1, \dots, x_n$ произведены в моменты $t = 1, \dots, n$.

Ряд $x_t, t = 1, \dots, n$ называется **строго стационарным** (или **стационарным в узком смысле**), если для любого m ($m < n$) совместное распределение вероятностей случайных величин $X_{t_1}, \dots, X_{t_m}$, такое же как и для $X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_m+\tau}$, при любых $t_1, \dots, t_m$ и τ , таких, что $1 \leq t_1, \dots, t_m \leq n$ и $1 \leq t_1 + \tau, \dots, t_m + \tau \leq n$, т.е функция плотности при сдвиге во времени не изменится

$$P\{x_{t_1}, \dots, x_{t_m}\} = P\{x_{t_1+\tau}, \dots, x_{t_m+\tau}\}.$$

- $E(X_t) \equiv \mu$
- $D(X_t) \equiv \sigma^2$
- $Cov(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(\tau)$ для любых t и τ .

Ряд, для которого выполнены указанные три условия, называют **стационарным в широком смысле** (**слабо стационарным**, **стационарным второго порядка** или **ковариационно стационарным**).

Если ряд является стационарным в широком смысле, то он не обязательно является строго стационарным. В то же время, и строго стационарный ряд может не быть стационарным в широком смысле просто потому, что у него могут не существовать математическое ожидание и/или дисперсия. (В отношении последнего примером может служить случайная выборка из распределения Коши.) Кроме того, возможны ситуации, когда указанные три условия выполняются, но, например $E(X_t^3)$ зависит от t .

13. Нестационарный процесс авторегрессии – интегрированного скользящего среднего $ARIMA(p,d,q)$.

Рассмотрим нестационарный ряд случайного блуждания. Его уравнение имеет вид: $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$. Если взять первую разность, равную $\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = (1 - L)x_t$, то уравнение сведется к следующему: $\Delta x_t = y_t = \varepsilon_t$. То есть в первых разностях ряд станет стационарным.

Рассмотрим ряд вида: $x_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \varepsilon_t$.

Его плотностью детерминированная часть (тренд) является параболической функцией времени. Очевидно, что этот ряд нестационарный. Математическое ожидание этого процесса зависит от времени.

Проверим: Приводится ли такой ряд взятием последовательных разностей к стационарному?

Если мы возьмем первую последовательную разность, то получим: $\Delta x_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \varepsilon_t - \alpha - \beta(t-1) - \gamma(t-1)^2 \varepsilon_{t-1} = \beta + 2\gamma t - \gamma + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$.

Степень полинома, описывающего тренд, понизилась на единицу. Если провести взятие второй разности, то останется $\Delta^2 x_t = \Delta x_t - \Delta x_{t-1} = 2\gamma + (\varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2})$, то есть получим стационарный процесс.

НЕОБЯЗАТЕЛЬНЫЙ АБЗАЦ(Правда, видно, как в уравнение начинает "проникать" скользящее среднее. Полученный двукратным взятием разностей стационарный процесс является процессом $MA(2)$. Но, по крайней мере, взятием последовательных разностей исходный ряд с квадратичным трендом приводится к стационарному виду..)

Бокс и Дженкинс на основании этого свойства предложили выделить класс нестационарных рядов, которые взятием последовательных разностей можно привести к стационарному виду, а именно к виду $ARMA$.

Если ряд после взятия d последовательных разностей приводится к стационарному, то этот ряд носит название $ARIMA(p, d, q)$.

$ARIMA$ - процесс авторегрессии - интегрированного скользящего среднего. При этом p - параметр AR -части, d - степень интеграции, и q - это параметр MA -части.

В операторном виде процесс $ARIMA(p, d, q)$ записывается как: $\alpha_p(L)\Delta^d x_t = \beta_q(L)\varepsilon_t$.

Или по-другому $\underbrace{\alpha_p(L)(1-L)^d}_{p+d} x_t = \beta_q(L)\varepsilon_t$.

Этот процесс x_t нестационарный, потому что здесь не выполняется условие, что все корни характеристического уравнения по модулю меньше единицы.

Но, если обозначить $(1-L)^d x_t = y_t$, то y_t - это стационарный процесс.

16. Проверка гипотезы $H_0 : b = b_0$. Доверительные интервалы для коэффициентов регрессии. Коэффициент детерминации.

Основные гипотезы, лежащие в основе линейной регрессионной модели (возможно из можно не писать в билете):

Основные гипотезы:

1. $Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t, t = 1, \dots, n$, - спецификация модели.
2. X_t - детерминированная величина; вектор $(X_1, \dots, X_n)'$ не коллинеарен вектору $i = (1, \dots, 1)'$.
3. (a) $E\varepsilon_t = 0, E(\varepsilon_t)^2 = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ - не зависит от t ($E\varepsilon = 0, V(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$)
(b) $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$, некоррелированность ошибок для разных наблюдений.
Часто добавляется условие:
(c) Ошибка $\varepsilon_t, t = 1, \dots, n$, имеют совместное нормальное распределение:
 $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Свойства МНК-оценок

МНК-оценки коэффициентов регрессии $\hat{a}, \hat{b}$ имеют совместное нормальное распределение:

$$\hat{a} \sim N\left(a, \sigma^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2}\right), \quad \hat{b} \sim N\left(b, \sigma^2 \frac{1}{\sum x_t^2}\right), \text{ где } x_t = X_t - \bar{X}, \bar{X} = \frac{\sum X_t}{n}$$

Отсюда получаем, что $\hat{b} - b \sim N(0, \sigma_b^2)$, где $\sigma_b^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$

$$\widehat{Var}(\hat{b}) = s_b^2 = s^2 \frac{1}{\sum (X_t - \bar{X})^2} = \frac{s^2}{\sum x_t^2} \Rightarrow \frac{\hat{b} - b}{s_b} \sim N(0, 1)$$

Учитывая, что распределение оценки дисперсии ошибок $s^2 = \widehat{\sigma^2}$ имеет распределение:

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2), \text{ получим}$$

$$\frac{s}{\sigma} \sim \sqrt{\frac{1}{n-2} \chi^2(n-2)} \Rightarrow \{\text{по определению статистики Стьюдента}\} \Rightarrow t = \frac{(\hat{b} - b)/s_b}{s/\sigma} \sim t(n-2), \text{ где } t(n-2)$$

— Т-статистика Стьюдента с $(n-2)$ степенями свободы.

$$\text{Так как } \frac{\sigma_b}{\sigma} = \frac{s_b}{s} \text{ получим } t = \frac{\hat{b} - b}{s_b} \sim t(n-2) (*)$$

$$\text{Аналогично показываем, что } t = \frac{\hat{a} - a}{s_a} \sim t(n-2).$$

Статистику (*) можно использовать для проверки гипотезы $H_0 : b = b_0$ против альтернативной гипотезы $H_1 : b \neq b_0$.

Пусть H_0 верна, тогда $t = \frac{\hat{b} - b_0}{s_b} \sim t(n-2)$

Гипотеза H_0 принимается при $|t| \leq t_\alpha(n-2)$.

Другими словами:

»

100% · (1 - α)-ый доверительный интервал для b равен:

$$\left[\hat{b} - t_e s_b, \hat{b} + t_e s_b \right], \text{ где } t_e \text{ — точка } t\text{-распределения с } (n-2) \text{ степенями свободы при уровне значимости } \alpha.$$

(Хз надо ли это писать в билете) Если гипотеза нормальности ошибок не выполняется — **3(с)**, то при некоторых условиях регулярности на поведение X_t при росте n оценки $\hat{a}, \hat{b}$ имеют асимптотически нормальное распределение, то есть

$$\hat{a} \rightarrow N\left(a, \sigma^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2}\right), \quad \hat{b} \rightarrow N\left(b, \sigma^2 \frac{1}{\sum x_t^2}\right)$$

Коэффициент детерминации R^2

Рассмотрим вариацию значения Y_t вокруг среднего значения $\bar{Y}$: $\sum (Y_t - \bar{Y})^2$.

Разобьем вариацию на две части: объяснению и необъяснённую.

Пусть $\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$ — предсказанные значения Y_t .

Тогда $Y_t - \bar{Y} = (Y_t - \hat{Y}_t) + (\hat{Y}_t - \bar{Y})$ и вариация Y_t записывается в виде:

$$\sum (Y_t - \bar{Y})^2 = \sum (Y_t - \hat{Y}_t)^2 + \sum (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 + 2 \sum (Y_t - \hat{Y}_t)(\hat{Y}_t - \bar{Y}) \sim TSS = ESS + RSS + 2 \sum (Y_t - \hat{Y}_t)(\hat{Y}_t - \bar{Y})$$

TSS – вся дисперсия. ESS – необъясненная часть дисперсии. RSS – объясненная часть дисперсии.

Третье слагаемое равно 0, так как

$$\sum e_t(\hat{Y}_t - \bar{Y}) = \sum e_t(\hat{a} + \hat{b}X_t - \bar{Y}) = \{x_t = X_t - \bar{X}\} = (\hat{a} + \hat{b}\bar{X} - \bar{Y}) \sum e_t + \hat{b} \sum e_t x_t = 0 \text{ (вектор остатков регрессии } e_t \text{ ортогонален константе } i \text{ - единичному вектору и вектору } x)$$

Коэффициентом детерминации называется $R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = \frac{RSS}{TSS}$.

$R^2 \in [0, 1]$, если $R^2 = 0$, то регрессия ничего не дает, $R^2 = 1$ — точная подгонка.

17. Статистические свойства оценок по методу наименьших квадратов параметров множественной регрессии. Коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

Модель множественной регрессии (многомерная регрессивная модель)

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, n} \quad \text{или} \quad y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, n},$$

где x_{tp} — значение регрессора x_p в наблюдении t , а $x_{t1} = 1$, $t = \overline{1, n}$. С учетом этого различаются модели со свободным и без свободного члена.

Если выполнены следующие гипотезы, то модель называется **нормальной линейной регрессионной**:

1. $y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$, $\overline{1, n}$ — спецификация модели;
2. $x_{t1}, \dots, x_{tk}$ — детерминированные величины. Вектор $x_s = (x_{1s}, \dots, x_{ns})^T$, $s = \overline{1, k}$ линейно независимые в R^n ;
3. $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ — не зависит от t ;
4. $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$ — статистическая независимость (некоррелированность) ошибок для разных наблюдений;
5. Ошибки ε_t , $t = \overline{1, n}$ имеют совместное нормальное распределение: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

Матричный вид гипотез

Пусть y — вектор-столбец $(y_1, \dots, y_n)^T$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^T$ — вектор коэффициентов; $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$ — вектор ошибок. $X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}$ — $n \times k$ матрица объясняющих переменных.

Столбцами матрицы X являются $n \times 1$ векторы регрессоров $x_s = (x_{1s}, \dots, x_{ns})^T$, $s = \overline{1, k}$

1. $y = X\beta + \varepsilon$ — спецификация модели;
2. X — детерминированная матрица, имеет максимальный ранг k ;
3. $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon) = \varepsilon \varepsilon^T = \sigma^2 I_n$;
4. $\varepsilon \sim N(0, \sigma I_n)$, то есть ε — нормально распределенный случайный вектор со средним 0 и матрицей ковариации $\sigma^2 I_n$ (нормальная линейная регрессионная модель).

Теорема Гаусса-Маркова для множественной регрессии

Предположим, что выполнены гипотезы 1-3. Тогда оценка методом наименьших квадратов $\hat{\beta}_{OLS} = (X^T X)^{-1} X^T y$ является наиболее эффективной (в смысле наименьшей дисперсии) оценкой в классе линейных (по y) несмещённых оценок (Best Linear Unbiased Estimator, BLUE).

Статистические свойства МНК оценок

Введем вектор прогнозируемых значений $\hat{y} = X\hat{\beta} = X(X^T X)^{-1} X^T y$

Введем вектор остатков регрессии: $e = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta} = (I - X(X^T X)^{-1} X^T)y = My$, где $M = (I - X(X^T X)^{-1} X^T) = (I - N)$.

Вычислим мат. ожидание и матрицу ковар. e :

$$\mathbb{E}(e) = (I - X(X^T X)^{-1} X^T)\mathbb{E}(y) = (I - X(X^T X)^{-1} X^T)X\beta = X\beta - X\beta = 0. \text{Var}(e) = \text{Var}(My) = M\text{Var}(y)M^T = M\sigma^2 I M^T = \sigma^2 M$$

Оценка дисперсии ошибок: $\mathbb{E}(e^T e) = \text{tr}(\text{Var}(e)) = \sigma^2 \text{tr}(I_n - N) = (n - k)\sigma^2$ (tr — след матрицы).

Следовательно $s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{e^T e}{n - k} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n - k}$ — несмещенная оценка дисперсии ошибок, то есть $\mathbb{E}s^2 = \sigma^2$.

Распределение: $\frac{e^T e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - k)$ или $(n - k)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - k)$

Оценки $\hat{\beta}$ и s^2 независимы в предположении нормальной линейной множественной регрессионной модели $\hat{\beta}_{OLS} = (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + \varepsilon) = \beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon = \beta + A\varepsilon$

Вектор $\hat{\beta}$ и e имеют совместное многомерное нормальное распределение $\Rightarrow$ нужно доказать их некоррелированность

$AM = (X^T X)^{-1} X^T (I - X(X^T X)^{-1} X^T) = 0$. Тогда (так как $\mathbb{E}e = 0$): $\text{Cov}(\hat{\beta}, e) = \mathbb{E}((\hat{\beta} - \beta)e^T) = \mathbb{E}(A\varepsilon \varepsilon^T M) = \sigma^2 AM = 0$. Так как s^2 является функцией $e \Rightarrow$ оценки $\hat{\beta}$ и s^2 независимы.

Коэффициент детерминации R^2 и скорректированный коэффициент детерминации R_{adj}^2

Разобьем вариацию $\sum (y_t - \bar{y})^2$ на две части: объясняемую и не объясняемую.

$$\sum (y_t - \bar{y})^2 = \sum (y_t - \hat{y}_t)^2 + \sum (\hat{y}_t - \bar{y})^2 + 2 \sum (y_t - \hat{y}_t)(\hat{y}_t - \bar{y})$$

То же самое в векторной форме:

$$(y - \bar{y}i)^T (y - \bar{y}i) = (y - \hat{y})^T (y - \hat{y}) + (\hat{y} - \bar{y}i)^T (\hat{y} - \bar{y}i) + 2(y - \hat{y})^T (\hat{y} - \bar{y}i), \text{ где } i - \text{единичный вектор.}$$

Третье слагаемое равно нулю: $(y - \hat{y})^T (\hat{y} - \bar{y}i) = e^T (X\hat{\beta} - \bar{y}i) = e^T X\hat{\beta} - \bar{y}e^T i = 0$, так как $e^T X = 0$, $e^T i/n = 0$.

Поэтому: $\|y - \bar{y}i\|^2 = \|y - \hat{y}\|^2 + \|\hat{y} - \bar{y}i\|^2$ ($TSS = ESS + RSS$)(*) TSS — вся дисперсия. ESS — необъясненная часть дисперсии. RSS — объясненная часть дисперсии.

Положим: $y_* = y - \bar{y}i$, $\hat{y}_* = \hat{y} - \bar{y}i \Rightarrow y_*^T y_* = e^T e + \hat{y}_*^T \hat{y}_*$.

Коэффициентом детерминации называют $R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{e^T e}{y_*^T y_*} = \frac{\hat{y}_*^T \hat{y}_*}{y_*^T y_*}$, $R^2 \in [0, 1]$.

R^2 корректно определен, только если вектор $i = (1, \dots, 1)^T$ принадлежит линейной оболочке векторов $x_1, \dots, x_k$.

Свойства R^2 :

1. R^2 возрастает при добавлении еще одного регрессора.
2. R^2 изменяется даже при простейшем преобразовании зависимой переменной, поэтому сравнивать по значению R^2 можно только регрессии с одинаковыми зависимыми переменными.

Попыткой устранить эффект, связанный с ростом R^2 при возраст. числа регресс., является коррекция R^2 на число регресс.

Скорректированным (adjusted) R^2 называется $R_{adj}^2 = 1 - \frac{e^T e / (n - k)}{y_*^T y_* / (n - 1)}$

Заметим, что нет никакого существенного оправдания такого способа коррекции (то есть можно по другому корректировать, главное устранять недостаток возрастания при увеличении числа регрессоров).

Свойства скорректированного R^2

1. $R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k}$
2. $R^2 \geq R_{adj}^2$, $k > 1$.
3. $R_{adj}^2 \leq 1$, но может принимать значения < 0 .

18. Проверка гипотезы о линейном ограничении общего вида $H_0 : H\beta = r$.

Линейное ограничение общего вида $H_0 : H\beta = r$. Пусть H — $q \times k$ матрица, β — $k \times 1$ вектор коэффициентов, r — $q \times 1$ вектор.

Число ограничений не превосходит числа параметров и ограничения линейно независимы, т.е. $q \leq k$ и матрица H имеет максимальный ранг: $\text{rank}(H) = q$.

Пример. В качестве примера рассмотрим следующие матрицы H, r для $k = 3, q = 2$:

$$H\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = r.$$

Это условие соответствует системе двух линейных ограничений

$$\begin{cases} \beta_1 = 2 \\ \beta_2 - \beta_3 = 0 \end{cases}$$

$$F = \frac{(H\hat{\beta} - r)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta} - r)/q}{e'e/(n-k)} \sim F(q, n-k).$$

Если справедлива гипотеза $H_0 : H\beta - r = 0$, то статистика F не должна принимать слишком больших значений, а именно, с 95%-вероятностью $F < F_c(q, n-k)$, где $F_c(q, n-k)$ есть 95%-квантиль распределения Фишера $F(q, n-k)$.

Другой вид F -статистики:

$$F = \frac{(\hat{\beta} - \beta)'H'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}H(\hat{\beta} - \beta)/q}{e'e/(n-k)} \sim F(q, n-k)$$

Условие $F < F_c(q, n-k)$ задает 95%-доверительную область для коэффициентов β (выпуклую).

В случае $H = I$ статистика F выглядит следующим образом:

$$F = \frac{(\hat{\beta} - \beta)'(X'X)(\hat{\beta} - \beta)/k}{e'e/(n-k)} \sim F(k, n-k).$$

$H_0 : \beta_{k-q+1} = \beta_{k-q+2} = \dots = \beta_k = 0$. Гипотеза является, конечно, частным случаем общей линейной гипотезы $H\beta = r$.

$$F = \frac{(e'e - e'e)/q}{e'e/(n-k)} = \frac{(\text{ESS}_R - \text{ESS}_{UR})/q}{\text{ESS}_{UR}/(n-k)} \sim F(q, n-k).$$

Здесь ESS_R — сумма квадратов остатков "короткой" (*restricted*) регрессии; ESS_{UR} — сумма квадратов остатков "длинной" (*unrestricted*) регрессии.

F -статистику можно выразить через коэффициенты детерминации R^2 для "короткой" и "длинной" регрессий:

$$F = \frac{(R_{UR}^2 - R_R^2)/q}{(1 - R_{UR}^2)/(n-k)} \sim F(q, n-k)$$

При $F < F_c(q, n-k) \Rightarrow H_0$ о "короткой" регрессии принимается, т.е. использование q дополнительных регрессоров ничего не добавляет к качеству оценивания модели.

19. Модели процессов авторегрессии и скользящего среднего: AR(p), MA(q) и ARMA(p,q). Условия стационарности этих процессов.

Процесс авторегрессии порядка p (AR(p)) определяется соотношениями

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad a_p \neq 0,$$

где ε_t - процесс белого шума с $D(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$.

$Cov(X_{t-s}, \varepsilon_t) > 0$ для всех $s > 0$.

При рассмотрении процессов авторегрессии и некоторых других моделей удобно использовать **оператор запаздывания L (lag operator)**, который воздействует на временной ряд и определяется соотношением

$$LX_t = X_{t-1}$$

Если оператор запаздывания применяется k раз, что обозначается как L^k , то это дает в результате

$$L^k X_t = X_{t-k}$$

Тогда процесс авторегрессии p -го порядка перепишется в виде:

$$a(L)X_t = \varepsilon_t$$

где

$$a(L) = 1 - (a_1 L + a_2 L^2 + \dots + a_p L^p).$$

Для того, чтобы такой процесс был стационарным, все корни алгебраического уравнения $a(z) = 0$ должны лежать вне единичного круга, т.е. $|z| > 1$.

Процесс скользящего среднего порядка q ($MA(q)$) определяется соотношениями:

$$X_t = \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2} + \dots + b_q\varepsilon_{t-q} + \mu, \quad b_q \neq 0,$$

Используя оператор запаздывания L , $MA(q)$ можно переписать в следующем виде:

$$X_t - \mu = b(L)\varepsilon_t,$$

где $b(L) = 1 + b_1L + b_2L^2 + \dots + b_qL^q$.

Всякий стационарный процесс $AR(p)$ эквивалентен $MA(\infty)$.

Если корни $b(z) = 0$ лежат вне единичного круга, то ряд обратим, т.е. $MA(q)$ эквивалентен $AR(\infty)$.

Смешанный процесс авторегрессии – скользящего среднего (процесс авторегрессии с остатками в виде скользящего среднего) (ARMA(p,q)) определяется соотношениями:

$$X_t = a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \dots + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + \dots + b_q\varepsilon_{t-q}, \quad a_p \neq 0, \quad b_q \neq 0, \quad \varepsilon_t - \text{белый шум}$$

В операторной форме это соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} a(L) &= 1 - (a_1L + a_2L^2 + \dots + a_pL^p) \\ b(L) &= 1 + b_1L + b_2L^2 + \dots + b_qL^q \\ a(L)X_t &= b(L)\varepsilon_t, \end{aligned}$$

т.е. $a(L)$ и $b(L)$ имеют тот же вид, что и в определенных ранее моделях $AR(p)$ и $MA(q)$.

Процесс стационарен, если все корни уравнения $a(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$

Если все корни уравнения $b(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$ (**условие обратимости**), то существует эквивалентное представление процесса X_t в виде процесса авторегрессии бесконечного порядка $AR(\infty)$.

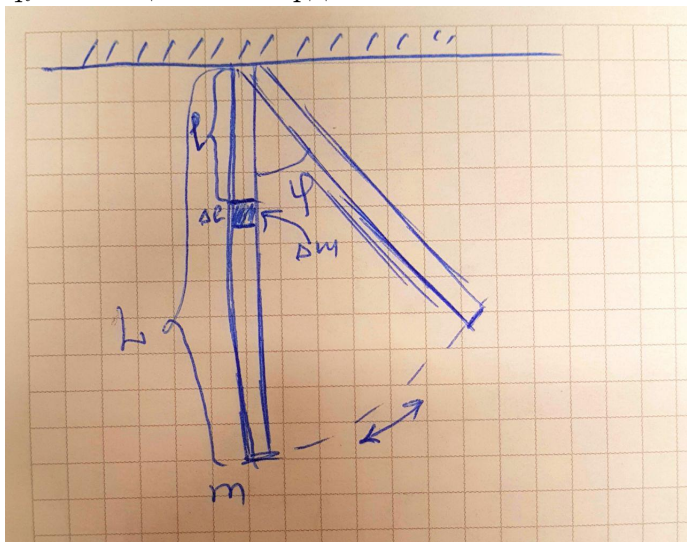
Билет 20

Напишите уравнение Лагранжа для массивного стержня длины L и массы m с закрепленным концом, колеблющегося в вертикальной плоскости, и оцените частоту его колебаний.

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \forall i = 1, \dots, N$$

где q_i – обобщенные координаты точек тела. Соответственно $L(q, \dot{q}, t)$ – ф-я Лагранжа.



Разобьем стержень на малые части массой Δm длиной Δl , $\Delta m = \rho S \Delta l$. Тогда каждую часть можно представить как математический маятник, и для него:

$$U = \Delta mgh = \Delta mgl(1 - \cos\varphi)$$

И соответственно ф-я Лагранжа:

$$\Delta L = \frac{\Delta m(l\dot{\varphi})^2}{2} - \Delta mgl(1 - \cos\varphi) = \rho S \Delta l \left(\frac{(l\dot{\varphi})^2}{2} - mgl(1 - \cos\varphi) \right)$$

Чтобы получить ф-ю Лагранжа для целого стержня, надо просуммировать ΔL по всем частям (т.е. проинтегрировать):

$$L = \int_0^L \rho S \left(\frac{(l\dot{\varphi})^2}{2} - mgl(1 - \cos\varphi) \right) dl = \rho S \left(\frac{L^3 \dot{\varphi}^2}{3 \cdot 2} - \frac{gL^2}{2}(1 - \cos\varphi) \right) = \frac{m(L\dot{\varphi})^2}{3 \cdot 2} - \frac{mgl}{2}(1 - \cos\varphi)$$

Подставляем это в уравнение Лагранжа, получаем:

$$m \frac{L^2}{3} \ddot{\varphi} = -mg \frac{L}{2} \sin\varphi$$

Отсюда ур-е колебания маятника:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2L} \sin\varphi = 0$$

Частота колебаний $\sqrt{\frac{3g}{2L}}$

Билет 22

Покажите, что функция $(\frac{e^x/x^*}{x/x^*})^m (\frac{e^y/y^*}{y/y^*})^\alpha$ является первым интегралом для системы ОДУ Лотки-Вольтерра $\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$, $\frac{dy}{dt} = k\beta xy - my$, описывающей сосуществование хищников y и жертв x , где x^* , y^* - стационарное решение этой системы.

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= f_1(t, x(t), y(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= f_2(t, x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{1}$$

Определение 1.

Первым интегралом нормальной системы (1) называется функция $F(t, x(t), y(t)) \equiv C$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой интегральной кривой системы (1).

Утверждение 1.

Функция $F(t, x(t), y(t)) \equiv C$ является первым интегралом системы (1) тогда и только тогда, когда ее производная в силу системы (1) равна нулю:

$$\left. \frac{dF}{dt}(t, x(t), y(t)) \right|_{(1)} = 0.$$

Система хищник-жертва. Размножение жертв ограничивается давлением на них со стороны хищников. Размножение хищников ограничивается количеством добытой ими пищи (количеством жертв):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= k\beta xy - my.\end{aligned}\tag{2}$$

- $x(t)$ - численность жертв;
- $y(t)$ - численность хищников;
- α - коэффициент естественного прироста жертв;
- m - коэффициент естественной смертности хищников;
- $V(x) = \beta x$ - количество (биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, причем k -я часть полученной биомассы энергии расходуется хищником на воспроизводство, остальное тратится на поддержание основного обмена и охотничьей активности. Функцию $V(x)$ обычно называют трофической функцией или функциональным откликом хищника на плотность популяции жертвы.

$x^* = \frac{m}{k\beta}$, $y^* = \alpha/\beta$ - стационарное решение системы (2) (проверяется подстановкой). Докажем, что функция $(\frac{e^X}{X})^m (\frac{e^Y}{Y})^\alpha$, где $X = x/x^*$, $Y = y/y^*$ является первым интегралом системы (2). Продифференцируем эту функцию по t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[(\frac{e^X}{X})^m (\frac{e^Y}{Y})^\alpha] &= m(\frac{e^X}{X})^{m-1} \cdot \frac{e^X \dot{X} X - e^X \dot{X}}{X^2} \cdot (\frac{e^Y}{Y})^\alpha + \alpha(\frac{e^Y}{Y})^{\alpha-1} \cdot \frac{e^Y \dot{Y} Y - e^Y \dot{Y}}{Y^2} \cdot (\frac{e^X}{X})^m = \\ &= (\frac{e^X}{X})^m \cdot (\frac{e^Y}{Y})^\alpha \cdot [m\dot{X}(1 - \frac{1}{X}) + \alpha\dot{Y}(1 - \frac{1}{Y})] = \underbrace{(\frac{e^X}{X})^m \cdot (\frac{e^Y}{Y})^\alpha}_A \cdot [m\dot{X} + \alpha\dot{Y} - (m\frac{\dot{X}}{X} + \alpha\frac{\dot{Y}}{Y})] = \\ &= \left\{ X = x/x^*, Y = y/y^*, x^* = \frac{m}{k\beta}, y^* = \alpha/\beta \right\} = A \cdot [\dot{x}k\beta - \dot{y}\beta - (m\frac{\dot{x}}{x} + \alpha\frac{\dot{y}}{y})] = \left\{ (2) \right\} = \\ &= A \cdot [k\beta(\alpha x - \beta xy) + \beta(k\beta xy - my) - (\alpha m - \beta my + \alpha k\beta x - \alpha m)] = \\ &= A \cdot [k\beta\alpha x - \beta my - (-\beta my + \alpha k\beta x)] = 0. \end{aligned}$$

Из утверждения 1 следует, что функция $(\frac{e^X}{X})^m (\frac{e^Y}{Y})^\alpha$ является первым интегралом системы (2). Уравнение $(\frac{e^X}{X})^m (\frac{e^Y}{Y})^\alpha = C$ описывает семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых, соответствующих фазовым траекториям периодических решений системы (2). Заметим, что при увеличении C амплитуды колебаний x и y возрастают (рисунок 1).

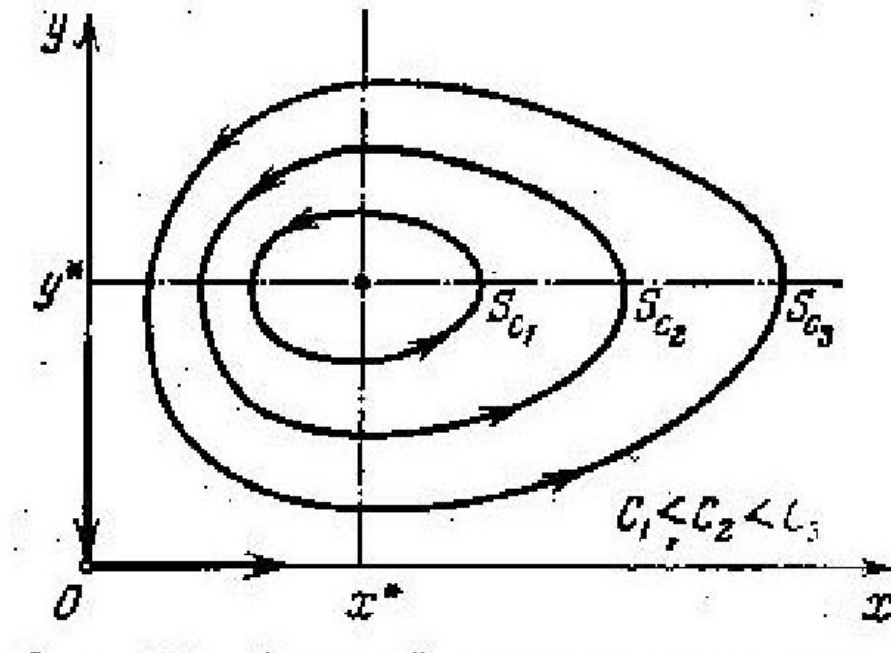


Рис. 1. Фазовый портрет

23. Сформулируйте необходимые и достаточные условия продуктивности неотрицательной, неразложимой матрицы в модели Леонтьева и докажите, что матрица является продуктивной или не является таковой.

Определение 1. Квадратная матрица $A (N \times N)$ называется *разложимой*, если одновременной перестановкой строк и столбцов её можно представить в виде

где $A_1 (m \times m)$, $A_3 ((N-m) \times (N-m))$, $m < N$.

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix},$$

Утверждение 1. Если матрица A разложима, то и матрица A^2 разложима, причём

$$A^2 = \begin{bmatrix} A_1^2 & \tilde{A}_2 \\ 0 & A_3^2 \end{bmatrix}$$

Теорема (Фробениуса-Перрона). Если неотрицательная матрица A неразложима, то у неё существует собственное число λ_A такое, что для любого другого собственного числа λ справедливо $|\lambda| < \lambda_A$, а соответствующий правый собственный вектор-столбец $\mathbf{x}_A$, ($A\mathbf{x}_A = \lambda_A\mathbf{x}_A$), и левый собственный вектор-строка $\mathbf{y}_A$, ($\mathbf{y}_A A = \lambda_A\mathbf{y}_A$), положительны.

Собственное число λ_A называют *фробениусовым числом*, а векторы $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{y}_A$ — *правым и левым фробениусовыми векторами*.

Пусть $r = \min r_i$, $R = \max r_i$, где $r_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$.

Утверждение 3. Если A неотрицательная неразложимая матрица, то при $r < R$ ее фробениусово число $r < \lambda_A < R$. Если же $r = R$, то $\lambda_A = R$.

Доказательство Пусть вектор $\mathbf{y}_A$ таков, что $\sum_{i=1}^N y_A^i = 1$. Умножим равенство $\mathbf{y}_A A = \lambda_A \mathbf{y}_A$ справа на вектор-столбец $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$. Получим $\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij} y_A^i = \lambda_A \sum_{i=1}^N y_A^i = \lambda_A$. Поменяв в левой части равенства порядок суммирования, имеем $\sum_{i=1}^N y_A^i \sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{i=1}^N y_A^i r_i = \lambda_A$. Строгие неравенства следуют из того, что вектор $\mathbf{y}_A$ положителен и $r < R$. Если же $r = R$, то $\lambda_A = R$

Определение 3. Неотрицательную матрицу A назовём *продуктивной*, если существует неотрицательная матрица $(E-A)^{-1}$.

Утверждение 4. Неотрицательная неразложимая матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда её фробениусово число $\lambda_A < 1$.

Доказательство: Достаточность. Пусть $\lambda_A < 1$. Если $\mathbf{x}_A$ правый фробениусов вектор, то $A\mathbf{x}_A = \lambda_A \mathbf{x}_A$. Отсюда и из положительности компонент вектора $\mathbf{x}_A$ следует, что $A^k \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} E - A^k &= (E - A)(E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) \\ E &= \lim_{k \rightarrow \infty} (E - A^k) = (E - A) \lim_{k \rightarrow \infty} (E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) \\ E &= (E - A)(E - A)^{-1} = (E - A) \cdot \text{const}, \\ &\text{где } \text{const} = E + A + A^2 + \dots + A^{k-1} \end{aligned}$$

Необходимость. Пусть матрица $(E-A)^{-1} \geq 0$. Для вектора $\mathbf{p} > 0$ решение $(E-A)\mathbf{x} = \mathbf{p}$ существует и $\mathbf{x} = (E-A)^{-1}\mathbf{p} > 0$. Очевидны соотношения $\lambda_A \mathbf{y}_A \mathbf{x} = \mathbf{y}_A A \mathbf{x} = \mathbf{y}_A (\mathbf{x} - \mathbf{p}) < \mathbf{y}_A \mathbf{x}$. Отсюда и из положительности числа $\mathbf{y}_A \mathbf{x}$ следует неравенство $\lambda_A < 1$ ■

Задача.

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы определить продуктивна матрица A или нет мы должны найти её фробениусово число λ_A . В случае, если $\lambda_A < 1$, матрица A будет продуктивной, иначе – нет.

$r_1 = 0,7, r_2 = 1, r_3 = 0,9$, значит $r = 0,7, R = 1$. Поскольку $r < R$, то $\lambda_A < R = 1$. Ответ: Матрица A продуктивна.

24. Опишите математическую модель коллективного поведения П.С. Краснощёкова и рассмотрите случай, когда у всех членов коллектива коэффициенты индивидуализма равны нулю (стадо).

Пусть ЛПР ($i = 1, N$) может принять одно из двух $S = 1,2$ альтернативных решений.

Пусть μ_i есть коэффициент индивидуализма (самостоятельности) i -ого ЛПР. При $\mu = 1$ данное ЛПР абсолютно самостоятельно, а при $\mu = 0$ — это абсолютный конформист, меняющий решения в угоду любому чужому мнению.

α_j - априорная вероятность принятия индивидом j решения "1"

Апостериорная вероятность (вероятность после общения с коллективом) того, что i -ый индивид примет решение с номером "1" равно $p_i \in [0, 1]$, а с номером "2" равно $1 - p_i$.

Модель Краснощёкова описывает способ вычисления апостериорной вероятности принятия решения $s = 1$ с учетом коэффициента индивидуализма:

$$p_i = \alpha_i \mu_i + (1 - \mu_i) \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} p_j,$$

В этой формуле $\lambda_{ij} \in [0, 1]$ — вероятность того, что i -е ЛПР примет решение $s = 1$ после общения с j -м ЛПР, при условии, что j -е ЛПР придерживается $s = 1$ -й альтернативы.

Модель Краснощёкова в матричной форме:

$$P = AM + (E - M)\Lambda P$$

В случае "стада" ($\mu_i = 0$ для всех i) $M = 0$. Таким образом, $(E - \Lambda)P = 0$. То есть определитель матрицы $E - \Lambda$ равен нулю, а у этого уравнения

существует бесконечное число решений. Однако, стадо движется не хаотично: все p_i равны между собой, то есть индивиды подражают друг другу:

$$p_i = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} p_j$$

При этом, если в коллективе появился индивид, у которого $\mu_k > 0$, то решения модели становится единственным: $p_i = \alpha_k$, то есть все копируют поведение k —того индивида.

25. Популяционные игры. Равновесие Нэша и строгое равновесие.

Популяционная игра - статическая модель взаимодействия в большой однородной группе индивидуумов.

$$G = \langle J, f_j(\pi, \omega), j \in J, \pi \in \Pi, \omega \in \Omega \rangle,$$

- J - множество стратегий участников игры;
- $\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ - распределение игроков по стратегиям;
- $\Pi = \{\pi | \pi_j \geq 0, \sum_{j \in J} \pi_j = 1\}$ - стандартный симплекс;
- $f_j(\pi, \omega)$ - выигрыш игроков, использующих стратегию j в зависимости от распределения по стратегиям π и других параметров модели ω (например, общей численности популяции и состояния внешней среды);

Равновесием по Нэшу популяционной игры G называется такое распределение π^* , что всякая стратегия, используемая с положительной частотой, является оптимальным ответом на данное распределение при любом значении параметра ω , т.е.

$$\forall \omega \in \Omega, \forall j \in J (\pi_j^* > 0) \Rightarrow j \in \operatorname{Arg} \max_{i \in J} f_i(\pi^*, \omega).$$

Если $f_j(\pi, \omega) = \alpha(\pi, \omega) \bar{f}_j(\pi) + b(\pi, \omega)$, т.е. функции выигрыша разложимы, то: $\forall j \in J : \pi_j^* > 0 \rightarrow j \in \operatorname{Arg} \max_{i \in J} \bar{f}_i(\pi^*)$.

Эволюционно устойчивой стратегией (ЭУС) для популяционной игры G называется такое распределение π^* , что

$$\forall \omega \in \Omega, \forall \pi \neq \pi^*, \exists \bar{\lambda}(\pi) \in (0, 1) : \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}(\pi)) f_{\pi^*}(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega) > f_{\pi}(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega), \text{ где}$$

$$f_{\pi}(\pi', \omega) = \sum_{j \in J} \pi_j f_j(\pi', \omega) - \text{средний выигрыш смешанной стратегии, или распределения } \pi, \text{ если}$$

индивиды в популяции распределены по чистым стратегиям.

Понятие ЭУС можно интерпретировать следующим образом. Пусть в некоторую популяцию, находящуюся в состоянии равновесия π^* , внедряется относительно небольшая группа "мутантов" с распределением по стратегиям π . Тогда, если распределение π^* является эволюционно устойчивым, то внедрявшаяся группа не сможет закрепиться в популяции, так как ее средняя приспособленность меньше, чем приспособленность исходной стратегии π^* .

Всякая ЭУС является равновесием Нэша. Действительно, если π не является равновесием, то мутанты с чистой стратегией лучшего ответа на π получают больший выигрыш, чем средний выигрыш в основной популяции. В силу непрерывности f относительно π это справедливо для любой достаточно малой группы таких мутантов. Данное утверждение справедливо, если доля отдельного индивида в популяции пренебрежимо мала в том смысле, что изменение его стратегии не влияет на значения функций выигрыша.

Уточним понятие ЭУС для взаимодействий в группах конечной численности, где изменение стратегии отдельного индивида влияет на значение функций выигрыша.

Для симметричной игры в нормальной форме с n игроками, множеством стратегий S и функцией выигрыша $f_j(s_j, s_{-j})$ ЭУС определяется как симметричная ситуация $s_j \equiv s$ такая, что при любом изменении стратегии отдельным игроком его выигрыш в новой ситуации будет не больше, чем выигрыш любого из остальных игроков, сохранивших прежнюю стратегию.

Строгим равновесием популяционной игры G называется такое распределение π^* , что все игроки используют одну и ту же стратегию, которая является единственно лучшим ответом на это распределение:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists j \in J : \pi_j^* = 1, \text{ и } \forall i \neq j, \forall \omega \in \Omega : f_j(\pi^*, \omega) > f_i(\pi^*, \omega) + \varepsilon.$$

Всякое строгое равновесие является ЭУС.

26. Модель динамики репликаторов.

В МДР предполагается, что в однородной популяции новые индивидуумы (потомки) наследуют стратегии родителей и сохраняют их в течение всего времени жизни.

Пусть взаимодействие между индивидуумами популяции в каждый период времени описывается популяционной игрой $G = \langle J, f_j(\pi, N), j \in J, \pi \in \Pi, N \geq 0 \rangle$. Выигрыш $f_j(\pi, N)$ представляет собой сумму средней рождаемости $fer_j(\pi, N)$ и выживаемости $\nu(\pi, N)$ для индивидуумов, использующих стратегию j , если общая численность популяции равна N , а распределение по стратегиям - π . Обозначим $N_j(t)$ число особей, использующих в период t стратегию $j \in J$. Тогда динамика такой популяции описывается системой

$$N_j(t+1) = N_j(t)f_j(\pi(t), N(t)) \quad (1)$$

Таким образом, состояние системы в каждый период времени полностью описывается $\bar{N}(t) = (N_j(t))_{j \in J}$, по которому однозначно определяется распределение по стратегиям $\pi(t) = (\pi_j(t) = N_j(t)/N(t))_{j \in J}$. Отметим, что в случае, когда $f_j(\pi) = \alpha(\pi, N)\bar{f}_j(\pi)$ из системы (1) вытекает автономная модель динамики $\pi(t)$:

$$\pi_j(t+1) = \pi_j(t)\bar{f}_j(\pi(t)) / \sum_{i \in J} \pi_i(t)\bar{f}_i(\pi(t)), j \in J.$$

27. Теоремы о связи равновесий Нэша и строгих равновесий с устойчивыми точками модели динамики репликаторов.

$G = \langle J, f_j(\pi, N), j \in J, \pi \in \Pi, N \geq 0 \rangle$ - популяционная игра.

$f_j(\pi, \omega)$ - выигрыш игроков, использующих стратегию j , π - распределение по стратегиям, N - общая численность популяции.

$N_j(t+1) = N_j(t)f_j(\pi(t), N(t))$ - динамика такой популяции.

Состояние системы в каждый период полностью характеризуется вектором $\bar{N}(t) = (N_j(t))_{j \in J}$, по которому однозначно определяется распределение по стратегиям $\pi(t) = (\pi_j(t) = \frac{N_j(t)}{N(t)})_{j \in J}$.

$N_s = \pi_s N$ - численное использование стратегии s .

(*) $N_s(t+1) = N_s(t)f_s(\pi(t), N(t)), t = 1, 2, \dots$, где $f_s(\pi, N) = fer_s(\pi, N) + \nu_s(\pi, N)$ - функция приспособленности стратегии s .

Теорема 3.1 (о связи р. Нэша и уст. точек МДР). $\square f_s$ разложима:

$$f_s(\pi, \omega) = a(\pi, \omega)\bar{f}_s(\pi) + b(\pi, \omega), a(\pi, \omega) \geq 0 \Rightarrow$$

1) $\forall$ уст. по Ляпунову распределение π^* системы (*) является р. по Нэшу популяционной игры $\bar{G} = \langle S, \bar{f}_s(\pi), s \in S, \pi \in \Pi \rangle$

2) если начальное распределение $\bar{N}(0) > 0$ и для траектории $\{\bar{N}(t)\} \exists \lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t, \bar{N}(0)) = \pi^*$, то π^* является р. Нэша указанной популяционной игры.

Теорема 3.2 (об асимптотически уст. ЭУС). Пусть в усл. т. 3.1 π^* - ЭУС для игры $\bar{G} \Rightarrow \pi^*$ - асимптотически уст. распределение системы (*).

Теорема 3.3 (о связи множеств доминирующих стратегий с динамикой поведения). Пусть S - множество строго доминирующих стратегий в игре $G' = \langle S, \ln \bar{f}_s(\pi), s \in S, \pi \in \Pi \rangle$. Тогда для $\forall s \in S$ и $\forall \bar{N}(0) > 0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_s(t, \bar{N}(0)) = 0$ на соответствующей траектории системы (*).

28. Модель взаимодействия родственников.

Утверждение о доминирующей стратегии.

Распространение альтруизма и кооперации.

Пусть взаимодействие в популяции характеризуется множеством стратегий S и функциями приспособленности $f_s(\pi)$, $s \in S$. Главная особенность данной модели – индивидуум способен различать сибсов (родных братьев или сестер) среди других членов популяции и выбирать стратегию в зависимости от этого признака.

Полная стратегия (s, s') включает:

- Компоненту s , применяемую к сибсам
- Компоненту s' для прочих индивидуумов

В данный период времени индивидуум с некоторой интенсивностью $\lambda_r \in (0,1)$ взаимодействует с сибсами, а с интенсивностью $1 - \lambda_r$ – с остальными индивидуумами из популяции. Общая приспособленность аддитивно зависит от результатов взаимодействия с родственниками и с остальной частью популяции:

$$\bar{f}_{(s,s')}(\pi') = \lambda_r f_s^r(s) + (1 - \lambda_r) f_{s'}(\pi'),$$

- $f_s^r(s)$ – функция, описывающая результаты взаимодействия с сибсами
- π' – распределение по компоненте s'
- Предполагается, что все сибсы применяют одну (унаследованную) стратегию

Таким образом, взаимодействие характеризуется популяционной игрой:

$$\bar{G} = \langle \bar{S} = \{(s, s') \in S \times S\}, \bar{f}_{(s,s')}(\pi') = \lambda_r f_s^r(s) + (1 - \lambda_r) f_{s'}(\pi') \rangle,$$

где $\bar{\pi}$ – распределение по полным стратегиям.

Теорема 1.

Всякая стратегия (s, s') , в которой $s \notin \underset{i}{\operatorname{Argmax}} f_i^r(i)$, строго доминируется стратегией (s^*, s') , где $s^* \in \underset{i}{\operatorname{Argmax}} f_i^r(i)$. Распределение $\bar{\pi}$ является равновесием Нэша в том и только том случае, если для всех указанных неоптимальных стратегий $\pi_{ss'} = 0$, а соответствующие распределение π' является равновесием Нэша для игры $\langle S, f_{s'}(\pi') \rangle$.

Таким образом, в отношениях типа “дилеммы заключенного” сибсы используют кооперативную стратегию применительно друг к другу.

Чтобы объяснить распространение альтруистического поведения, рассмотрим следующую модификацию модели.

Если отказаться от предположения об одинаковом состоянии сибсов и считать, что они могут оказаться в разных ролях (например, доминирующей и подчиненной), а стратегия и функция приспособленности могут зависеть от роли, то полная стратегия в отношении родственников задается парой $s = (s_\alpha, s_\beta) \in S \times S$.

В результате исключения строго доминируемых стратегий остаются лишь стратегии $s^* = (s_\alpha^*, s_\beta^*) \rightarrow \max_{(s_\alpha, s_\beta)} (f^\alpha(s) + f^\beta(s))$, обеспечивающие максимум суммарной приспособленности.

На основании теоремы 1 можно сделать вывод, что эволюция поведения в самовоспроизводящихся популяциях ведет к формированию поведения, максимизирующего суммарную приспособленность сибсов.

Кооперация и альтруизм.

Дилемма заключенного:

Два игрока, у каждого две стратегии: кооперативная (К) и эгоистичная (Э). При любом поведении партнера выгоднее эгоистичная стратегия. Суммарный выигрыш максимален, когда оба действуют кооперативно.

Пример:

	К	Э
К	(5;5)	(1;6)
Э	(6;1)	(2;2)

В данной игре существует единственная точка равновесия Нэша, которая соответствует эгоистичному поведению и является решением по доминированию. В реальности игроки часто ведут себя кооперативно.

Еще в больше степени отклоняется от максимизации индивидуальной приспособленности альтруистическое поведение (А – альтруистическое, Э – эгоистичное).

	А	Э
А	(5;5)	(1;10)
Э	(10;1)	(2;2)

Здесь альтруистическое поведение одного из партнеров в сочетании с эгоистичным поведением другого соответствует максимизации суммарной приспособленности. При этом альтруист получает меньше своего гарантированного выигрыша, который он мог бы получить в равновесии Нэша.

Пример кооперации:

Охота хищников, эгоисты экономят затраты в ущерб общей эффективности.

Пример альтруизма:

Альтруизм родителей по отношению к детям.

Билет 29

Многоуровневая модель налоговой инспекции.

В базовой модели налоговой инспекции с учетом коррупции предполагалось, что инспекторы и налогоплательщики максимизируют ожидаемые доходы, проверка требует фиксированных издержек и всегда верно определяет категорию проверяемого агента. Однако инспектор, обнаруживший факт уклонения, может быть подкуплен пойманным субъектом. Величина взятки лежит между максимальной приемлемой для плательщика и минимальной приемлемой для инспектора. Для устранения коррупции руководство проводит ревизии: перепроверяет некоторых инспекторов и увольняет скрывших уклонение от уплаты налогов. Стратегия организации инспекции заключается в определении вероятностей проверок и ревизий при фиксированных затратах на одну проверку. Организатор инспекции максимизирует чистый налоговый доход.

В модели предполагается способность центра контролировать фактическую частоту проверок без проведения ревизий. Также есть проблема возможной нехватки честных ревизоров.

Для устранения различных ограничений используется иерархическая контролирующая структура (она и описана ниже), подавляющая коррупцию на всех уровнях с привлечением малого числа честных инспекторов. Предполагается, что в распоряжении организатора инспекции есть доверенные лица, которые проводят проверки на верхнем уровне и всегда проверяют правильно, но стоимость их работы очень высока. Также организатор может привлекать для проверок неограниченное кол-во рациональных инспекторов, готовых брать взятки, если им это выгодно. Организатор определяет кол-во уровней инспекции, вероятность проведения проверки каждым уровнем и зарплаты рациональных инспекторов.

Базовая модель. Формализация задачи.

- Рассматривается фиксированное число N агентов уровня 0 (налогоплательщиков).
- Для каждого из них определен возможный набор действий (налоговых платежей) T_0 . Каждое действие t_0 характеризуется затратами агента. Оптимальное с точки зрения инспекции действие $t_0^*(I)$ зависит от значения некоторой случайной величины (дохода) $I \in [I_{\min}, I_{\max}]$ (например, $t_0^*(I)$ – заданное налоговое правило). $t_0 \in [t_{\min}, t_{\max}]$, где $t_{\min} = t_0^*(I_{\min})$, $t_{\max} = t_0^*(I_{\max})$.
- Независимые и одинаково распределенные случайные величины I имеют функцию распределения $F(I)$, известную всем участникам инспекции.
- Для проведения инспекции могут использоваться 2 типа сотрудников:
 - доверенные лица лидера, издержки на проверку которыми очень высоки.
 - любое необходимое число рациональных инспекторов, максимизирующих свой ожидаемый доход с учетом зарплат, взяток и штрафов.
- Проблема контроля возникает в связи с тем, что конкретное значение случайного фактора I наблюдается только действующим на нижнем уровне агентом.

Базовая модель. Задачи с фиксированными затратами и штрафами

Контролирующая иерархическая структура строится следующим образом:

- Инспекторы первого уровня проверяют агентов уровня 0 с вероятностью $p_1(t_0)$.
- Если проверка выявляет $t_0 < t_0^*$, то агент нулевого уровня выплачивает штраф $f_0(t_0^*(I) - t_0(I))$, $f_0 > 1$.
Стоимость одной проверки на этом уровне составляет c_1 .
- Инспектор первого уровня может вступить в сговор с проверяемым агентом. Для предотвращения коррупции организуется проверка 2-го уровня.
- Вероятность проверки $p_2(t_0, t_1)$ зависит от сообщений агентов уровней 0 и 1.
- ...
- На верхнем уровне k честными инспекторами осуществляется проверка с вероятностью $p_k(t_0, t_1, \dots, t_{k-1})$.
- Если проверка уровня l выявляет $t_l > t_{l-1}$, то все агенты нижестоящих уровней r ($r = 0, 1, \dots, l - 1$) в этой цепочке проверок платят штраф $f_r(t_l - t_{l-1})$.

Замечание 1

В соответствии с нашим подходом, целью инспекции не является выявление коррупции (поскольку это сложно реализуемо и затратно). Вместо этого предлагается предотвратить отклонение от честного поведения на каждом уровне.

Стратегия инспекции P включает:

- Количество уровней k
- Вероятности проверок $p_1(t_0), \dots, p_k(t_0, \dots, t_{k-1})$.

Следующие параметры заданы экзогенно в этой модели:

- Штрафные коэффициенты $f_0, \dots, f_{k-1}$
- Расходы на проверки $c_1, \dots, c_k$.

Задача

Задача состоит в нахождении стратегии инспекции, подавляющей коррупцию и обеспечивающей правильные действия агентов нулевого уровня с минимальными издержками на проверки.

Билет 30. Оптимальная стратегия проверок при фиксированных затратах на проверки и штрафах.

Рассматривается фиксированное число N агентов уровня 0 (налогоплательщиков). Для каждого из них определен возможный набор действий (налоговых платежей) T_0 . Каждое действие t_0 характеризуется затратами агента. Оптимальное с точки зрения инспекции действие $t_0^*(I)$ зависит от значения некоторой случайной величины (дохода) $I \in [I_{min}, I_{max}]$ (например, $t_0^*(I)$ - заданное налоговое правило). $t_0 \in [t_{min}, t_{max}]$, где $t_{min} = t_0^*(I_{min})$, $t_{max} = t_0^*(I_{max})$.

Независимые и одинаково распределенные случайные величины I имеют функцию распределения $F(I)$, известную всем участникам инспекции. Для проведения инспекции могут использоваться 2 типа сотрудников:

доверенные лица лидера, издержки на проверку которыми очень высоки, любое необходимое число рациональных инспекторов, максимизирующих свой ожидаемый доход с учетом зарплат, взяток и штрафов.

Проблема контроля возникает в связи с тем, что конкретное значение случайного фактора I наблюдается только действующим на нижнем уровне агентом.

Контролирующая иерархическая структура строится следующим образом:

- Инспекторы первого уровня проверяют агентов уровня 0 с вероятностью $p_1(t_0)$;
- Если проверка выявляет $t_0 < t_0^*$, то агент нулевого уровня выплачивает штраф $f_0(t_0^*(I) - t_0(I))$, $f_0 > 1$. Стоимость одной проверки на этом уровне составляет c_1 ;
- Инспектор первого уровня может вступить в сговор с проверяемым агентом. Для предотвращения коррупции организуется проверка 2 уровня;
- Вероятность проверки $p_2(t_0, t_1)$ зависит от сообщений агентов уровней 0 и 1;
- ...;
- На верхнем уровне k честными инспекторами осуществляется проверка с вероятностью $p_k(t_0, t_1, \dots, t_{k-1})$;
- Если проверка уровня l выявляет $t_l > t_{l-1}$, то все агенты нижестоящих уровней l в этой цепочке платят штраф $f_r(t_l - t_{l-1})$.

В связи с нашим подходом, целью инспекции не является выявление коррупции (это сложно реализуемо и затратно). Вместо этого предлагается предотвратить отклонение от честного поведения на каждом уровне.

Стратегия инспекции P включает:

количество уровней k , вероятности проверок $p_1(t_0), \dots, p_k(t_0, t_1, \dots, t_{k-1})$.

Следующие параметры заданы экзогенно в этой модели:

штрафные коэффициенты $f_0, \dots, f_{k-1}$, расходы на проверки $c_1, \dots, c_k$.

Задача состоит в нахождении стратегии инспекции, подавляющей коррупцию и обеспечивающей правильные действия агентов нулевого уровня с минимальными издержками на проверки.

Рассмотрим коалицию C_l , включающую некоторое количество агентов уровня 0 и инспекторов уровней $1, \dots, l, l < k$, проверяющих работу агентов из этой коалиции. Стратегия C_l

задается функциями $t_0(I), \dots, t_l(I)$, определяющими сообщения уровней $i=0, \dots, l$ в случае проверки какого-либо агента уровня 0 из этой коалиции.

Определение. Назовем стратегию Р устойчивой к отклонению коалиции C_l , если суммарный выигрыш ее членов достигает максимума при честном поведении, т.е.:

$$t_0(I) = t_0^*(I), t_r(I) = t_0^*(I), r = 1, \dots, l,$$

при условии честного поведения агентов верхних уровней $l+1, \dots, k-1$.

Назовем стратегию Р устойчивой к коалиционным отклонениям, если это условие выполнено для всех $l=1, \dots, k-1$.

При честном поведении ожидаемые затраты на одного агента составят:

$$\int_{I_{min}}^{I_{max}} (p_1(P, I)(c_1 + p_2(P, I)(c_2 + \dots + p_{k-1}(P, I)(c_{k-1} + p_k(P, I)c_k) \dots)) dF(I)$$

где $p_i(P, I) = p_i(t_0^*(I), \dots, t_0^*(I))$.

Утверждение 1. Оптимальные вероятности проверок в стратегии, устойчивой к коалиционным отклонениям, удовлетворяют условиям

$$p_1(t_0) = \hat{p}_1 = \frac{1}{f_0}, p_s(t_0, t_1, \dots, t_{s-1}) = \hat{p}_s = \frac{\sum_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum_{i=0}^{s-2} f_i}$$

для любых $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{s-1} < t_{max}, s = 2, \dots, k$.

Теперь для заданной стратегии Р рассмотрим некооперативное СПР и определим условия существования СПР, соответствующего честному поведению на всех уровнях $0, 1, \dots, k-1$.

- Рассмотрим случай, когда на каждом уровне $s \leq l-1$ отклонение уровня 0 не было полностью выявлено ($t_{l-1} < t_0^*$).
- При каких условиях возможен взаимовыгодный сговор агентов уровней $0, 1, \dots, l$, если агенты верхних уровней действуют честно?

Сговор, выгодный для всех агентов $0, 1, \dots, l$, возможен, если для некоторых $t_l \in [t_{l-1}, t_0^*(I)), b_{il} \geq 0, i = 1, \dots, l-1$ разрешима следующая система:

$$\begin{cases} p_{l+1}(t_0, \dots, t_l) * f_i * (t_0^*(I) - t_l) + b_{il} < f_i * (t_0^*(I) - t_l), i = 0, \dots, l-1, \\ \sum_{i < l} b_{il} - p_{l+1}(t_0, \dots, t_l) * f_l * (t_0^*(I) - t_l) > 0. \end{cases}$$

Здесь b_{il} - взятка, выплачиваемая агентом уровня i последнему проверяющему, t_l - его сообщение.

Определение. Если для любых $I \in (I_{min}, I_{max}], l = 1, \dots, k-1; t_0 \leq \dots \leq t_l < t_0^*(I)$ система несовместна, будем говорить, что стратегия Р определяет СПР с честным поведением.

Утверждение 2. Стратегия Р определяет СПР с честным поведением тогда и только тогда, когда для любых $t_0, \dots, t_{k-1} < t_{max}$ вероятности проверок удовлетворяют условию:

$$p_1(t_0) \geq \frac{1}{f_0}, p_2(t_0, t_1) \geq \frac{f_0}{f_0 + f_1}, p_s(t_0, t_1, \dots, t_{s-1}) \geq \frac{\sum_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum_{i=0}^{s-1} f_i}, s = 2, \dots, k.$$

Утверждение 3. Оптимальная стратегия в классе СПР с честным поведением и оптимальная стратегия, устойчивая к коалиционным отклонениям, совпадают и удовлетворяют условию

$$p_1(t_0) = \hat{p}_1 = \frac{1}{f_0}, p_s(t_0, t_1, \dots, t_{s-1}) = \hat{p}_s = \frac{\sum_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum_{i=0}^{s-1} f_i}$$

для любых $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{s-1} < t_{max}, s = 2, \dots, k.$

31. Поколения архитектур компьютеров и парадигмы программирования.

Середина 70-х годов: векторно-конвейерные компьютеры.

Особенности архитектуры: векторные функциональные устройства, зацепление функциональных устройств, векторные команды в системе команд, векторные регистры.

Программирование: векторизация самых внутренних циклов

Суперкомпьютер Cray-1.

Начало 80-х годов: векторно-параллельные компьютеры

Особенности архитектуры: векторные функциональные устройства, зацепление функциональных устройств, векторные команды в системе команд, векторные регистры. Небольшое число процессоров объединяются над общей памятью.

Программирование: векторизация самых внутренних циклов и распараллеливание на внешнем уровне, единое адресное пространство, локальные и глобальные переменные.

Суперкомпьютер Cray X-MP

Начало 90-х годов: массивно-параллельные компьютеры. Особенности архитектуры: тысячи процессоров объединяются с помощью коммуникационной сети по некоторой топологии, распределенная память.

Программирование: обмен сообщениями, отсутствие единого адресного пространства, PVM, Message Passing Interface. Необходимость выделения массового параллелизма, явного распределения данных и согласования параллелизма с распределением.

Суперкомпьютер **Cray T3D**, Суперкомпьютер **Intel Paragon XPS140**

Середина 90-х годов: параллельные компьютеры с общей памятью.

Особенности архитектуры: сотни процессоров объединяются над общей памятью.

Программирование: единое адресное пространство, локальные и глобальные переменные, Linda, OpenMP

DEC AlphaServer, суперкомпьютер **Sun StarFire**

Начало 2000-х: кластеры из узлов с общей памятью

Особенности архитектуры: большое число многопроцессорных узлов объединяются вместе с помощью коммуникационной сети по некоторой топологии, распределенная память; в рамках каждого узла несколько (многоядерных) процессоров объединяются над общей памятью.

Программирование: неоднородная схема MPI+OpenMP; необходимость выделения массового параллелизма, явное распределение данных, обмен сообщениями на внешнем уровне; распараллеливание в едином адресном пространстве, локальные и глобальные переменные на уровне узла с общей памятью.

Суперкомпьютер МГУ "**Чебышев**", "**К**" суперкомпьютер

Середина 2000-х: кластеры из узлов с общей памятью с ускорителями

Особенности архитектуры: большое число многопроцессорных узлов объединяются вместе с помощью коммуникационной сети по некоторой топологии, распределенная память; в рамках каждого узла несколько (многоядерных) процессоров объединяются над общей памятью; на каждом узле несколько ускорителей (GPU, Phi).

Программирование: MPI+OpenMP+OpenCL/CUDA;

Суперкомпьютер МГУ "**Ломоносов**", суперкомпьютер **Tianhe-2**

70-е – Векторизация циклов

80-е – Распараллеливание циклов (внешних) + Векторизация (внутренних)

90-е - MPI

середина 90-х - OpenMP

середина 2000-х - MPI+OpenMP

2010-е - CUDA, OpenCL, MPI+OpenMP+ускорители (GPU, Xeon Phi) ...

Для каждого поколения нужно анализировать алгоритмы (чтобы приспособить их под новую платформу) и описывать найденные свойства (для эффективной реализации).

Описание алгоритмов: математическое описание, сложность, информационный граф, свойства и особенности, ресурс параллелизма, масштабируемость, локальность данных, детерминированность, вычислительная мощность, входные/выходные данные, вычислительное ядро, локальность вычислений, производительность, эффективность, коммуникационный профиль.

32. Архитектурные особенности современных микропроцессоров.

Микропроцессором (МП) называется программно-управляемое устройство, осуществляющее процесс цифровой обработки информации и управления им и построенное, как правило, на одной БИС (большая интегральная схема).

Архитектурой процессора называется комплекс его аппаратных и программных средств, предоставляемых пользователю.

Особенность	В чем заключается
Многозадачность	Возможность работы в одном из двух режимов: реальном (real) и защищенном (protected). В <i>реальном</i> режиме возможно выполнение только одной программы. В <i>защищенном</i> (protected) режиме обеспечивается выполнение сразу нескольких программ за счет переключения между задачами
Поддержка системы виртуальных машин	возможность моделирования в одном МП работу нескольких компьютеров, управляемых <i>разными</i> ОС.
Конвейерная обработка команд	Одновременное выполнение разных тактов последовательных команд в разных частях МП с непосредственной передачей результатов выполнения из одной части МП в другую.
Кэширование данных	Использование высокоскоростного буфера для обмена данными между микропроцессорной памятью (регистрами МП) и основной памятью ЭВМ.
Суперскалярная архитектура	Наличие в микропроцессоре более 1 конвейера для выполнения команд (параллелизм на уровне инструкций)
Гарвардская архитектура процессора	В кэш-памяти 1 уровня предусмотрено разделение команд и данных, которые хранятся отдельно друг от друга для повышения эффективности обработки
Расширенный набор инструкций	Новые команды, расширяющие базовый набор инструкций МП, для работы с мультимедийной информацией и одновременной однопоточной обработки множественных данных.
Многоядерные процессоры	Объединение двух или более исполняющих устройств на одной ИС, действующих как единое устройство.
Технология автоматического увеличения тактовой частоты процессора	Для обеспечения дополнительной производительности и при условии соблюдения ограничений по мощности, температуре и току, процессор может автоматически «разгоняться», то есть увеличивать рабочую тактовую частоту всех своих ядер.

35. Информационный граф и ресурс параллелизма алгоритмов.

Информационный граф (или граф алгоритма) - ориентированный граф, состоящий из вершин, соответствующих операциям, и направленных дуг, соответствующих передаче данных между ними.

Вершины графа алгоритма могут соединиться несколькими дугами, в частности когда в качестве разных аргументов одной операции используется одна и та же величина. Граф алгоритма почти всегда является параметризованным графом.

Граф алгоритма используется как удобное представление алгоритма при исследовании его структуры, ресурса параллелизма, а также других свойств. Его можно рассматривать как параметризованную информационную структуру. Он сохраняет информативность структуры, при этом обладает компактностью за счет параметризации.

Особенностями графа алгоритма являются:

- его ацикличность;
- невозможность, в общем случае, его описания простым перечислением, в силу того, что его составляющие могут зависеть от внешних параметров решаемой им задачи (например, алгоритм, реализующий метод Гаусса — от размера матрицы).

Ресурс параллелизма - это где и насколько мы можем сделать программу более эффективной за счет распараллеливания.

Ресурс параллелизма алгоритма включает:

- Оценку параллельной сложности алгоритма
- Структуру параллелизма (иерархичность)
- Ключевые параллельные ветви в терминах конечного и массового параллелизма

Конечный параллелизм - параллелизм, определяемый информационной независимостью некоторых фрагментов в тексте программы.

Массовый параллелизм - параллелизм, определяемый информационной независимостью итераций циклов программы.

Суперкомпьютерное моделирование турбулентных течений Рассмотрим уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \nu \Delta \vec{v} \end{cases}$$

Тут над $\vec{v}$ и p пишется $\sim$, но в теке не получается сделать

Неизвестные: $\vec{v}$ - скорость течения, p - давление. После обреза размеривания(???) получаем систему:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \operatorname{grad} p = \frac{1}{Re} A \vec{v} \end{cases} \quad (1)$$

Турбулентное течение состоит из вихрей различных размеров. Крупные вихри переходят в более мелкие, те в еще более мелкие, в еще-еще более мелкие, в еще совсем более мелкие, и так масштабы течения уменьшаются, пока не дойдут до Колмогоровского масштаба, на котором кинетическая энергия движения жидкости или газа переходит в тепло, во внутреннюю энергию, за счет вязкости среды. Происходит переход кинетической энергии по каскаду от крупных вихревых структур течения к более и более мелким.

То есть, чем больше в изучаемом течении перепад масштабов, тем больше нужно сеточных ячеек. У течения есть характеристика – число Рейнольдса (Re). Оно, по сути, определяет перепад масштабов от крупных структур до самых мелких, после которых происходит диссипация в тепло. Чем больше размер объекта или чем больше скорость течения или чем меньше вязкость среды – тем больше это число. Соответственно, тем более высокое нужно пространственное и временное разрешение.

Известно, что при достаточно больших Re ($Re > Re_{crit}$, для разных областей этот Re_{crit} разный) возникают турбулентные течения.

Есть 3 основных моделей турбулентностей:

1) Прямое численное моделирование – DNS (Direct Numerical Simulation). Аппроксимируем ур-е (1) на мелкой сетке, ловящие мелкие вихри. Если использовать явные схемы, то из-за мелкой сетки - очень много времени, след-но нужен суперкомп. Неявные схемы - ограничение по времени меньше, но получаем сложную и объемную СЛАУ, к-рая может не поместиться в ОЗУ, след-но нужен суперкомп.

2) Метод крупных вихрей – LES (Large Eddy Simulation).

Моделируем сетку крупнее колмогоровского масштаба и решаем на ней (1), след-но теряем мелкие вихри. После возможно восстановить мелкие вихри,

напрмиер каким-либо импирическими моделями из физ экспериментов. Тоже нужен суперкомп.

3)Осредненные уравнения – RANS (Reynolds Averaged Navier – Stokes).

Если вообще все масштабы течения загнать в модель, то получится стационарный расчет RANS. Все масштабы течения мы отдали на откуп модели и получили стационарное осредненное решение – как если бы в каждой ячейке был датчик измерений физических величин, и мы бы усредняли его показания на длительном интервале времени.

Билет 39. Архитектурные особенности графических процессоров, направленные на массивно-параллельные вычисления.

CPU - небольшое число мощных, независимых ядер, 3-х уровневый кэш

GPU - вместо ядер потоковый мультипроцессор (streaming multiprocessor, SM):

1. 32 скалярных ядра CUDA cores, ~1.5ГГц
2. 2 Warp Scheduler (warp - 32 ядра)
3. Файл регистров, 128 КБ
4. 2-х уровневый кэш
5. Текстовые юниты
6. 16 Special Function Unit - интерполяция ~ трансцендентная математика один. Точности

Много простых ядер, работающих на небольшой частоте. Небольшие кэши на GPU: 32 ядра делят 64 КБ L1 кэша, общий L2 кэш, L3 нет.

Оперативная память с высокой пропускной способностью и **высокой латентностью**, оптимизированная для коллективного доступа. Так как память с высокой латентностью, то чтобы эффективнее загружать ядра на много нитей и за счет быстрого переключения контекста перекрывать обращения одних нитей вычислениями в других имеется следующая иерархия:

Нить -> warp (32 нити) -> Block (до 32 warp) -> Grid (решетка из блоков)

Block и Grid - 3d, каждая нить, блок получают свои координаты.

На уровне нитей - SIMD - все нити выполняют одно и то же действие с разными данными.

Warp-ы выполняются независимо, называется все - SIMT.

Глобальная память

Расположение в DRAM GPU, до 4ГБ, можно выделять как с хоста, так и с устройства.

Работа оптимизирована так, чтобы отдать максимальное число данных за одно обращение.

Транзакция - загрузка из глобальной памяти пула в 128 байт, начиная с адреса, кратного 128. Взаимодействие идет через кэш. Размер кэш линии L1 - 128 байт, L2 - 32 байта, можно работать не через L1 кэш, тогда транзакции по 32 байта.

Данные хранятся по строкам, чтобы добиться выравнивания по 128 байт, можно воспользоваться CudaMallocPitch - передаем, сколько у нас будет входных данных, возвращаем с учетом padding.

Билет 40. Методы эффективной организации параллельных вычислений на графических процессорах

Коротко:

1. Утилизация латентности памяти

Цель: эффективно загружать ядра

Решение CPU: сложная иерархия кэшей

GPU: За счет наличия сотен ядер и миллионов нитей на GPU легче утилизировать всю полосу пропускания. Быстрое переключения контекста – эффективное перераспределение вычислений

2. SIMT(Single instruction, multiple thread) и масштабирование

Виртуальное: Поддержка миллионов нитей в GPU; независимость виртуальных блоков

Аппаратное: Мультипроцессоры независимы -> Можно “нарезать” GPU с разным кол-вом SM (streaming multiprocessor)

3. Асинхронность в CUDA

Чтобы GPU больше времени работало в фоновом режиме, параллельно с CPU, некоторые вызовы являются асинхронными. Отправляют команду на устройство и сразу возвращают управление хосту

4. Работа с глобальной памятью

a. Расположена в DRAM GPI

b. Объем до 4 Гб

c. Использование кэшей L1, L2

Общие принципы эффективной работы:

- Обращения нитей варпа* в память должны быть пространственно-локальными
- Начала строк матрицы должны быть выровнены
- Использование массивов структур
- Выбор режима кэша L1
- Избегать косвенной адресации
- Избегать обращений нитей варпа* к столбцу матрицы

*Варп – группа из 32 потоков и является минимальным объемом данных, обрабатываемых SIMD-способом в мультипроцессорах CUDA.

Полную версию билета см в gosu.pdf, all.pdf (билет 40) или билеты_скиподы.pdf (билет 16)